Sesión preparatoria Olimpiada Matemática Española

17 de marzo de 2017

1. Encuentra el mayor número entero N que cumpla las siguientes condiciones.

   a) $\left\lfloor \dfrac{N}{3} \right\rfloor$ tiene las tres cifras iguales.

   b) $\left\lfloor \dfrac{N}{3} \right\rfloor = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$ para un cierto n natural.

   Se recuerda que $\lfloor x \rfloor$ es la parte entera de x.

2. En un campeonato de fútbol los partidos ganados cuentan como 3 puntos, los empatados como 1 punto y los perdidos como 0 puntos. Tras la celebración del campeonato, en que cada equipo juega un único partido con todos los demás, resulta que el equipo que más puntos ha acumulado es el mismo que menos partidos ha ganado. Determina el número de equipos más pequeño con el que es posible esta situación.

3. Sea E la elipse de ecuación:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
   con a, b reales positivos. Consideremos tres rectas paralelas r_1, r_2 y r_3, cada una de las cuales corta a E en dos puntos distintos. Sean estos puntos A_1, B_1, A_2, B_2 y A_3, B_3, respectivamente. Probar que los puntos medios de los segmentos A_1B_1, A_2B_2 yA_3B_3 están alineados.

4. Hallar todos los enteros positivos $x, y \geq 1$ y $n \geq 2$ tales que $y^n - x^n = 2017$.

5. Sea $A_1A_2 \ldots A_{12}$ un dodecágono regular con centro O. Las regiones triangulares OA_iA_{i+1}, $1 \leq i \leq 12$ ($A_{13} = A_1$) son coloreadas en rojo, azul, verde o amarillo de modo que regiones adyacentes tengan colores distintos. ¿De cuántas maneras distintas se puede colorear el dodecágono?